www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR ANNEE 1989

PREMIERE EPREUVE A OPTION (Durée : 3 h 00 - Cœfficient : 9)

MATHEMATIQUES

M - P

Ce sujet est réservé aux candidats ayant choisi l'option M ou P lors du dépôt de candidature. Le changement d'option n'est pas autorisé.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation tiendra compte du soin et de la rigueur apportés dans le travail.

—==oooo==—

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E.

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à 3 lignes et 3 colonnes, $G_3(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices inversibles.

On se donne dans E trois vecteurs indépendants : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, définis par les colonnes de leurs composantes dans la base $\mathcal{B}$, soit :

$$U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}.$$

On note ${}^tA$ la matrice transposée d'une matrice A. Ainsi ${}^tU$, ${}^tV$, ${}^tW$ sont les lignes transposées des colonnes U, V, W.

On considère dans tout le problème la matrice $M = U.{}^tU + V.{}^tV + W.{}^tW$; on lui associe un endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$.

1.) Soit p l'endomorphisme de E associé à la matrice $U.{}^tU$ dans la base $\mathcal{B}$.

Déterminer le rang de p, son espace image : Im p, son noyau : Ker p, et donner une définition géométrique de p.

2.)

a) Quel est le rang de M ?

b) Quelle est la matrice ${}^tM$ transposée de M ?

L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

c) Soit Φ la forme quadratique qui, à tout vecteur $\vec{x}$ de E, défini par la colonne X de ses composantes dans la base $\mathcal{B}$, associe le nombre $\Phi(\vec{x}) = {}^tX.M.X$.

Quelle est la nature de la surface d'équation $\Phi(\vec{x}) = 1$ dans la base $\mathcal{B}$?

3.)

a) On suppose que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forment une base orthonormée.

Quelle est alors la matrice M ?

b) On suppose que M = I, matrice unité d'ordre 3.

Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forment-ils une base orthonormée ?

4.)

a) Soit Q_o la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui a pour colonnes U, V, W.

Montrer que $M = Q_o.{}^tQ_o$.

b) Soit Q une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que $M = Q.{}^tQ$, et g l'endomorphisme de E associé à la matrice ${}^tQ$ dans la base $\mathcal{B}$.

Soit $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ une base orthonormée de vecteurs propres de f et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres associées.

On pose $g(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ pour i = 1, 2, 3.

Montrer que les vecteurs $\vec{w}_i$ sont orthogonaux deux à deux, et que $\vec{w}_i^2 = \lambda_i$.

c) Déterminer la matrice M si on la suppose orthogonale.

Quelles sont alors toutes les matrices Q telles que $M = Q.{}^tQ$?

T.S.V.P.

5.)

a) Soit A une matrice de $G_3(\mathbb{R})$. On pose $C = {}^tA.A$.

Montrer qu'il existe dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice P orthogonale et une matrice Δ diagonale, telles que $C = P.\Delta^2.P^{-1}$.

b) On pose alors $A' = A.P$.

Calculer ${}^tA'.A'$.

En déduire qu'il existe une matrice orthogonale Ω telle que $A' = \Omega.\Delta$.

c) En déduire que quelle que soit A dans $G_3(\mathbb{R})$, il existe Ω et Ω_1 orthogonales et Δ diagonale telles que $A = \Omega.\Delta.\Omega_1$.

d) Comment construire toutes les matrices Q de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M = Q.{}^tQ$?

6.)

a) On suppose $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ orthogonaux deux à deux.

Déterminer les valeurs propres de f, et donner une base orthonormée de vecteurs propres de f.

b) Soit h un automorphisme de E, A sa matrice dans la base $\mathcal{B}$, et $C = {}^tA.A$.

Soit ℓ l'automorphisme de E associé à C dans la base $\mathcal{B}$, $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ une base orthonormée de vecteurs propres de ℓ, et α_1, α_2, α_3 les valeurs propres de ℓ associées.

Montrer que :

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E \times E \qquad h(\vec{x}).h(\vec{y}) = \vec{x}.\ell(\vec{y}).$$

c) On pose $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$ et $\vec{y} = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + y_3\vec{u}_3$.

Calculer $h(\vec{x}).h(\vec{y})$ en fonction de x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 et α_1, α_2, α_3.

En déduire qu'il existe trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ orthogonaux deux à deux, tels que : $\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E \times E$,

$$h(\vec{x}).h(\vec{y}) = (\vec{u}.\vec{x})(\vec{u}.\vec{y}) + (\vec{v}.\vec{x})(\vec{v}.\vec{y}) + (\vec{w}.\vec{x})(\vec{w}.\vec{y}).$$

d) Montrer que quelle que soit la matrice Q de $G_3(\mathbb{R})$, il existe trois colonnes U, V, W telles que $Q.{}^tQ = U.{}^tU + V.{}^tV + W.{}^tW$.

7.) On suppose dans cette question $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ unitaires (et toujours indépendants).

a) Déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres de f lorsque $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w} = 0$ et $\vec{v}.\vec{w} = \cos\varphi \neq 0$ (on pourra chercher un vecteur propre de f comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$).

b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f lorsque :

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{w} = \vec{w}.\vec{u} = \cos\varphi \neq 0.$$

---=oOo=---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail